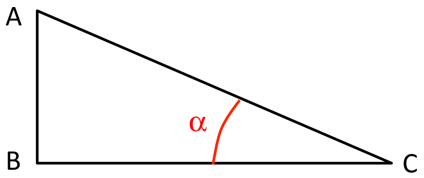
Quelques formules de trigonométrie pour la physique …



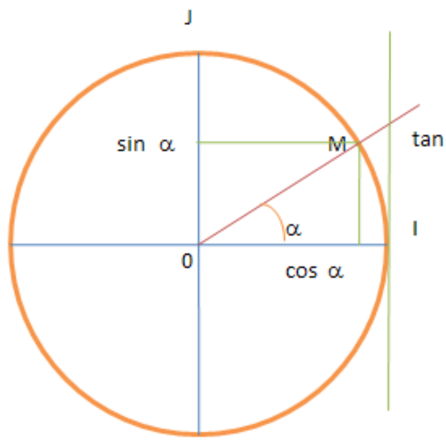
1. Définition des fonctions trigonométriques :

Considérons un triangle rectangle en B. Alors :

$$\sin\alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{\textit{opposé}}{\textit{hypothénuse}} \qquad \cos\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{\textit{adjacent}}{\textit{hypothénuse}} \qquad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{AB}{BC} = \frac{\textit{opposé}}{\textit{adjacent}}$$

2. Valeurs remarquables.

Angles en radians	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
Angles en degrés	0	30	45	60	90
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan x$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	Non défini



3. Propriétés des fonctions trigonométriques.

$$\cos(-x) = \cos(x) \qquad \cos(\pi + x) = -\cos(x) = \cos(\pi - x) \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$\sin(-x) = -\sin(x) \qquad \sin(\pi + x) = -\sin(x) = -\sin(\pi - x) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$\tan(-x) = -\tan(x) \qquad \tan(\pi + x) = \tan(x) = -\tan(\pi - x) \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{\tan(x)} = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

4. Formules de base :.

Pour tout $x \in \Re$, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$

Pour tout $x \in \left]0;\pi\right[$, $\sin(x) = \sqrt{1 - \cos^2(x)}$

5. Formules d'addition :.

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \qquad \sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

Cas particuliers : $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$ $\qquad \cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

6. Développement de produits :.

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$ $\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$

7. Formules de linéarisation :

$\cos^2 a = \frac{1}{2}\left[1+\cos(2a)\right]$ $\sin^2 a = \frac{1}{2}\left[1-\cos(2a)\right]$

8. Equations trigonométriques :

$\cos x = \cos a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a+2k\pi \\ x = -a+2k\pi \end{cases}$ $\sin x = \sin a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a+2k\pi \\ x = \pi - a+2k\pi \end{cases}$ $\tan x = \tan a \Leftrightarrow x = a + k\pi$

$k \in \mathbb{Z}$

9. Trigonométrie et nombres complexes :

$\exp(ix) = e^{ix} = \cos x + i \sin x$ $\exp(-ix) = e^{-ix} = \cos x - i \sin x$

$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

10. *Cas des petits angles :*

Si $x << 1rad$ alors $\cos x \approx 1$ $\sin x \approx x$ $\tan x \approx x$

Ces relations seront valables en physique pour des angles *<20°*

11. Fonctions réciproques :

Pour tout $y \in [-1;1]$ et $x \in [0;\pi]$, $y = \cos(x) \Leftrightarrow x = Arc\cos(y)$

Pour tout $y \in [-1;1]$ et $x \in [-\pi/2;\pi/2]$, $y = \sin(x) \Leftrightarrow x = Arc\sin(y)$

Pour tout $y \in \Re$ et $x \in]-\pi/2;\pi/2[$, $y = \tan(x) \Leftrightarrow x = Arc\tan(y)$

12. *Conversions :*

Conversion de degrés vers radians : $\theta(rad) = \theta(°) \times \frac{\pi}{180}$

Conversion de radians vers degrés : $\theta(°) = \theta(rad) \times \frac{180}{\pi}$