Travaux dirigés de Mécanique n°3

Exercice 1 : Travail d'une force

On considère un point matériel M de masse m pouvant se placer le long de l'axe $(O, \vec{e_x})$ dans le référentiel galiléen $\mathscr{R}$. Il est soumis à une force $\vec{F} = -kx\vec{e_x}$, x étant la position du point M.

1. Déterminer le travail de la force $\vec{F}$ pour aller du point $A(x_A)$ au point $B(x_B)$ directement, en suivant l'axe $(O, \vec{e_x})$. Déterminer le travail de la force $\vec{F}$ pour aller du point $A(x_A)$ au point $B(x_B)$ en passant par le point $C(x_C)$, en restant sur l'axe $(O, \vec{e_x})$.
2. La force est-elle conservative ? Si oui, déterminer l'énergie potentielle associée.

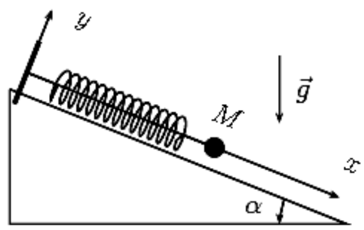
On considère le même point M soumis maintenant à une force $-F_0\vec{e_x}$ (constante) s'il se déplace dans le sens des x croissants et à une force $F_0\vec{e_x}$ s'il se déplace dans le sens des x décroissants.

1. Déterminer le travail de la force $\vec{F}$ pour aller du point $A(x=1)$ au point $B(x=3)$ directement, en suivant l'axe $(O, \vec{e_x})$, puis en passant par le point $C(x=4)$. (en restant sur l'axe $(O, \vec{e_x})$)
2. La force est-elle conservative ? Si oui, déterminer l'énergie potentielle associée.

Exercice 2 : Tir vertical

Un obus est lancé depuis le sol, selon la verticale ascendante avec une vitesse initiale $\vec{v_0} = v_0\vec{e_z}$. Quelle altitude maximale H va-t-il atteindre ? On utilisera une méthode énergétique et on néglige les frottements.

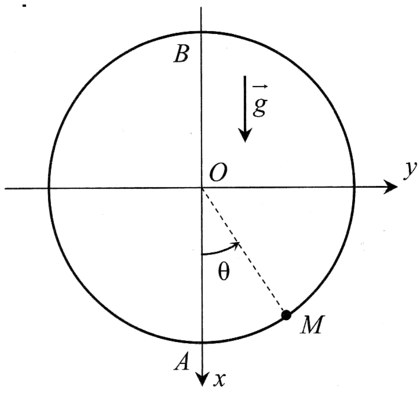
Exercice 3 : Masse liée à un ressort sur un plan incliné



On considère un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur k, dont les extrémités sont reliées à un point fixe O et un point matériel M de masse m. On suppose qu'il n'existe pas de frottement de glissement sur le plan incliné. Soit un axe Ox sur le plan incliné (voir figure). On prendra O comme origine de l'énergie potentielle de pesanteur. On donne m=0,2kg, l_0=30cm, k=10N.m^{-1}, g=10m.s^{-2} et α=30°.

1. Donner l'expression de l'énergie potentielle E_p de M en fonction des données et de x. Tracer la courbe $E_p(x)$. Déterminer la position d'équilibre de M.
2. On lâche M en x=20cm avec une vitesse vers le bas de 1m.s^{-1}. En utilisant le graphe précédent, que peut-on dire du mouvement de m ?
3. A quelle abscisse s'immobilisera la masse m si les frottements ne sont pas tout à fait nuls.

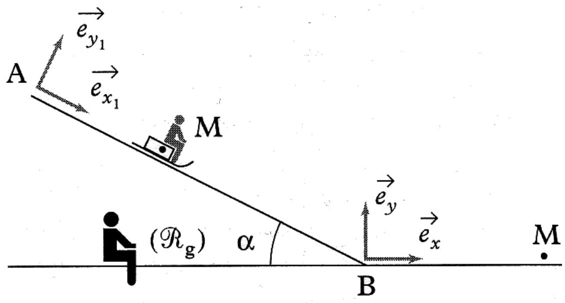
Exercice 4 : Equilibre et mouvement sur un cercle.



Un anneau de masse m, assimilable à un point matériel M, peut coulisser sans frottement sur un cerceau vertical de rayon r. L'anneau est lancé à l'instant initial avec une vitesse de norme v_0 depuis le point A, le plus bas du cerceau. On repère sa position au cours de son mouvement par l'angle θ.

1. Etablir l'expression de l'énergie potentielle de M en fonction de θ.
2. Tracer la courbe Ep(θ) et déterminer les positions d'équilibre de M.
3. On cherche à déterminer le mouvement possible de M selon la vitesse initiale.
   a. Montrer que l'énergie mécanique de M se conserve et donner sa valeur.
   b. En déduire, à partir d'un raisonnement graphique, qu'il y a deux types de mouvement possibles en fonction de la valeur de v_0. Préciser la valeur critique de v_0 séparant ces deux cas.
4. Donner l'équation différentielle du mouvement de M.

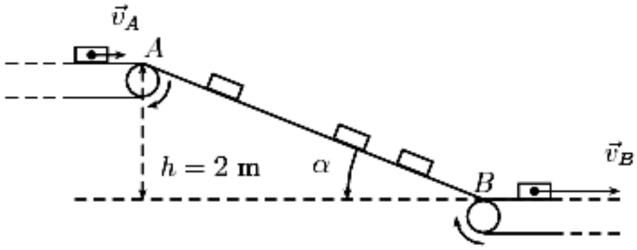
Exercice 5 : Luge vosgienne.



Un enfant et sa luge, assimilé à un point matériel M de masse m, glissent sans frottement sur une piste (plan incliné de longueur L faisant un angle α avec l'horizontale). Arrivés en bas, ils continuent leur trajet sur un plan horizontal où ils sont freinés par une force de frottements solide (coefficient f).
L'enfant démarre avec une vitesse nulle en A.
On travaille dans le référentiel terrestre supposé galiléen. La position de M est repérée lors de la première phase, par la variable x_1 : $\overrightarrow{AM} = x_1 \vec{e}_{x1}$ et lors de la seconde phase, par la variable x : $\overrightarrow{BM} = x\vec{e}_x$.

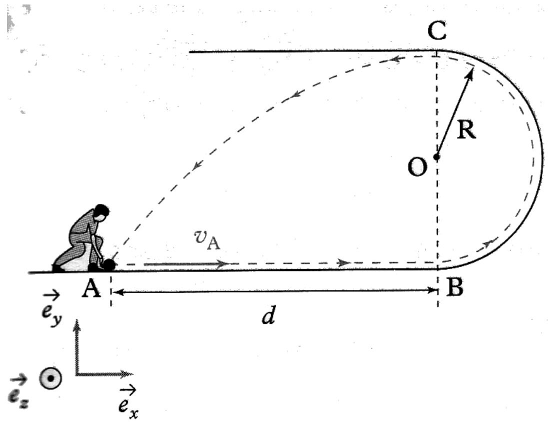
1. Déterminer, en utilisant le TPC, l'équation différentielle du mouvement de la phase de glissement sur le plan incliné (phase 1). Déterminer la vitesse en B ainsi que la durée de cette phase.
2. Déterminer, en utilisant le TPC, l'équation différentielle du mouvement de la phase de freinage sur le plan horizontal (phase 2). Déterminer la distance d'arrêt D.
3. Déterminer la durée totale du mouvement.

Exercice 6 : L'atelier du père Noël.



On étudie la chaîne de production de jouets du père Noël. Les jouets sont acheminés par un tapis roulant à vitesse constante $v_A = 0{,}5 m.s^{-1}$. Les jouets sont ensuite emballés à la chaîne par les lutins sur un nouveau tapis roulant avançant à la vitesse $v_B = 0{,}2 m.s^{-1}$. Pour relier les deux tapis, on dispose un plan incliné d'angle α par rapport à l'horizontale. Les jouets glissent sur ce plan. Le coefficient de frottement solide entre les jouets et le plan incliné est $f = 0{,}4$. La chaîne fonctionne correctement si les jouets arrivent au point B avec la vitesse du deuxième tapis roulant.
On suppose que le référentiel d'étude est galiléen. Donner l'expression puis la valeur numérique de l'angle α qui permet un bon fonctionnement du convoyeur.

Exercice 7 : Jeu de balle

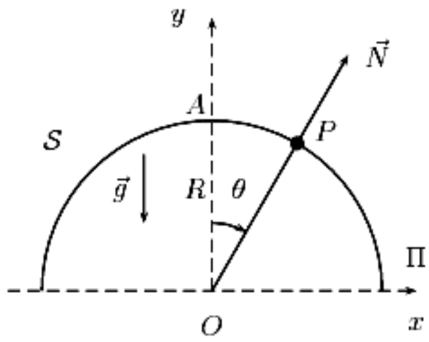


Un enfant lance une balle au niveau du point A avec une vitesse horizontale v_A. Cette balle est assimilée à un point matériel M de masse m qui peut se déplacer sans frottement. Le but du jeu est de permettre à la balle de rester en contact avec le support jusqu'au point C et qu'après sa chute (au delà de C), cette balle retombe exactement à son point de départ (en A). On travaille dans un référentiel galiléen.

1. On suppose que d=3R ; on cherche à trouver la vitesse v_{A0} requise au départ pour que la balle retombe exactement en A et que le jeu soit remis. Pour cela :
   a. Donner l'expression de la vitesse de la balle au niveau du point C.
   b. Exprimer la distance horizontale l parcourue par la balle dans sa chute d'une hauteur 2R en fonction de v_C.
   c. En déduire la vitesse v_{A0} requise.
2. Donner la valeur minimum d_{min} de d au-dessous de laquelle le jeu ne peut être réussi.

Exercice 8 : Happy feet

Un pingouin P assimilable à un point matériel de masse *m* est abandonné sans vitesse initiale en équilibre instable au sommet *A* d'un igloo (demi-sphère *S* de rayon *R* et de centre *O*) posée sur la banquise (plan Π). Le contact de *S* et de *P* est sans frottement. A la suite d'un déséquilibre infinitésimal, le pingouin P se met en mouvement en restant dans le plan vertical *Oxy*. On admet que, dans la phase (1) de son mouvement, P reste en contact avec *S*. Sa position est repérée par l'angle $\theta = \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OP}\right)$.

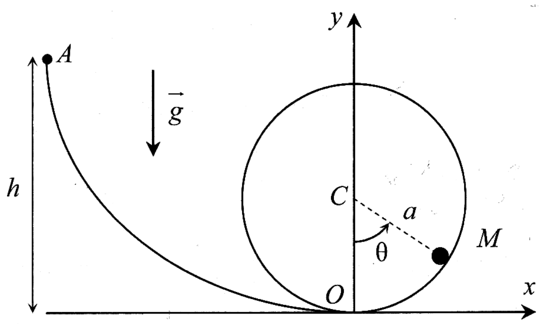


1. Déterminer la vitesse du pingouin *P* en fonction de θ, *g* et *R*.
2. Exprimer la projection de $\vec{N}$ sur OP en fonction de m, θ et g.
3. En déduire la valeur θ_0 de θ pour laquelle le pingouin *P* n'est plus en contact avec l'igloo (phase (2) du mouvement de *P*) et v_0 la vitesse de *P*.
4. Décrire l'allure de la trajectoire ultérieure du pingouin *P*.

Exercice 9 : Cascadeurs de père en fils

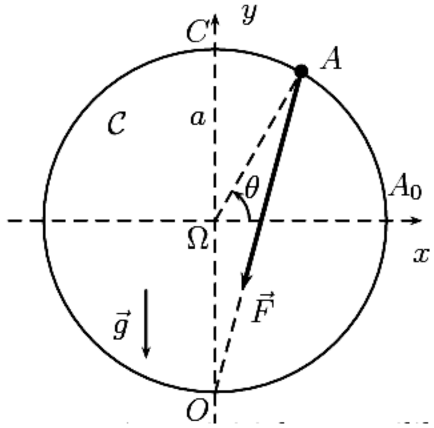
Les Rodriguez, Père et fils, célèbres bruiteurs et cascadeurs décident de tenter une figure périlleuse en roller. Le fils, assimilé à un point M de masse m, se lâche sans vitesse initiale depuis le point A d'une rampe, située à une hauteur h au dessus de O, point le plus bas de la rampe. A partir de O, la rampe a une forme cylindrique de rayon a : le patineur peut rouler à l'intérieur de ce cylindre en restant dans le plan vertical (Oxy), et éventuellement faire le tour complet. Le contact est sans frottement sur toutes les surfaces. On note $\vec{g} = -g\vec{e}_y$ l'accélération de la pesanteur, et on désigne par $\vec{e}_r = \overrightarrow{CM}/CM$ le vecteur unitaire radial par rapport au cercle.

1. Déterminer la norme v_O de la vitesse du patineur lorsqu'il arrive au point O.
2. Déterminer la norme v de la vitesse du patineur en un point M quelconque du cercle, repéré par l'angle θ.
3. Montrer que la réaction exercée par le support cylindrique sur le patineur est : $\vec{R} = -mg\left(\dfrac{2h}{a} + 3\cos\theta - 2\right)\vec{e}_r$.
4. Que se passe-t-il si, en un certain point du cylindre, v s'annule avec R non nulle ? (Répondre sans calcul).
5. Que se passe-t-il si c'est la réaction R qui s'annule avec v non nulle ? Décrire alors le mouvement de M. Rodriguez. (Répondre sans calcul).
6. Déterminer la valeur minimale que doit avoir la hauteur h pour que le rolliste puisse faire le tour complet du cylindre.



Exercice 10 : Particule guidée

Un point A, de masse m, est mobile sans frottement sur un cercle C de centre Ω et de rayon a contenu dans un plan vertical. En plus de son poids, il est soumis de la part du point le plus bas O du cercle à une force d'attraction dirigée constamment vers O et de module *F=kOA*, A est toujours en contact avec C.



1. Exprimer l'énergie totale E_m de A en fonction de θ, $\dot{\theta}$, *m*, *a*, *g* et *k*.
2. Quelle doit être la vitesse v_0 de passage au point A_0 pour le mobile atteigne le point C avec une vitesse nulle ?
3. Quelle est la norme de la réaction de la surface du cercle sur le mobile lorsque celui-ci passe au point O ?