Travaux dirigés de Mécanique n°2

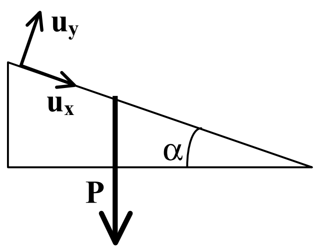
Un peu de méthode...

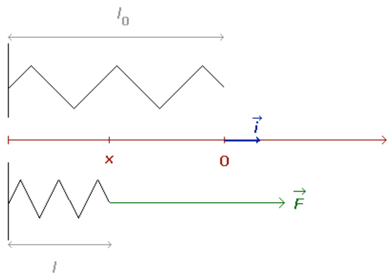
Exercice 1 : Unité d'une grandeur

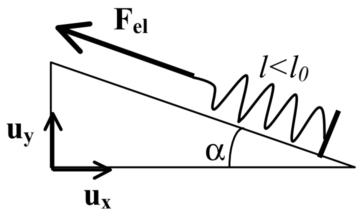
1. Déterminer l'unité de Cx dans l'équation : $F = \frac{1}{2}\rho S C_x v^2$. F est une force, ρ une masse volumique, S une surface et v une vitesse.
2. Déterminer l'unité de η dans l'équation : $F = 6\pi\eta r v$. F est une force, r une distance et v une vitesse.

Exercice 2 : Forces et projections

Dans les cas suivants, donner l'expression des forces dans la base représentée en fonction des paramètres donnés.







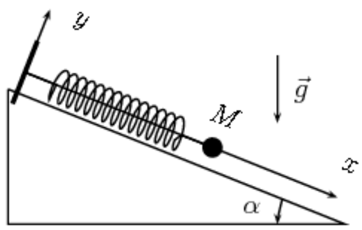
Exercices classiques qu'il faut absolument savoir traiter.

Exercice 3 : Glissement d'un objet sur un plan incliné

Soit un objet de centre d'inertie *M* et de masse *m* posé sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale. On utilise, pour étudier le mouvement, un axe (Ox) parallèle au plan incliné et dirigé vers le bas et tel que O coïncide avec le départ de l'objet.

1. On suppose que le contact se fait sans frottement :
   a. Etablir l'équation horaire du mouvement.
   b. En déduire la vitesse de l'objet en bas du plan incliné (on notera H la hauteur de l'objet au départ).
2. On suppose maintenant qu'il existe des frottements solides. On note *f* le coefficient de frottement.
   a. Quelle est la condition sur f pour que le solide commence à glisser à t=0 ?
   b. Reprendre les questions de la partie 1.

Exercice 4 : Masse liée à un ressort sur un plan incliné



On considère un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur *k*, dont les extrémités sont reliées à un point fixe *O* et un point matériel *M* de masse *m*.

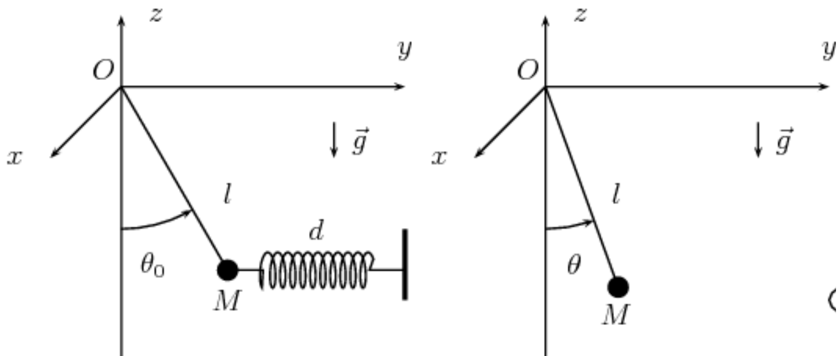
On suppose qu'il n'existe pas de frottement de glissement sur le plan incliné. Soit un axe *Ox* sur le plan incliné (voir figure)

1. Déterminer l_e, la longueur du ressort à l'équilibre en fonction de l_0, *m*, *g*, *k* et α.
2. A partir de la position d'équilibre, *M* est déplacé d'une distance *d* comptée algébriquement sur *Ox* et lâché sans vitesse initiale. Etablir l'équation horaire du mouvement de *M* en fonction de *d*, *k*, *m* et l_e.

Exercice 5 : Etude d'un pendule

On considère un pendule simple constitué d'un fil inextensible, de longueur l, de masse négligeable, fixé en O et auquel on a accroché une petite bille de masse m assimilable à un point matériel M. O est fixe dans le référentiel du laboratoire $\Re$ galiléen.

1. <u>Etude statique :</u> dans un premier temps, on accroche à *M* un ressort horizontal de masse négligeable, de constante de raideur *k* et de longueur à vide d_0.
   A l'équilibre dans $\Re$, la longueur du ressort prend la valeur *d* quand le fil s'écarte de l'angle θ_0 par rapport à la verticale tout en restant dans le plan *0yz* (figure 1). En déduire l'expression de *m* en fonction des autres données.



2. <u>Etude dynamique :</u> à l'instant initial, le ressort se détache de *M* (figure 2).
   a. Etablir l'équation différentielle reliant θ à ses dérivées temporelles (on néglige tout frottement).
   b. En déduire $\theta(t)$ pour les petites oscillations ($\sin\theta \approx \theta ; \cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$).
   c. Exprimer la tension du fil en fonction du temps toujours dans le cas des petites oscillations.

Exercice 6 : Chute avec frottements

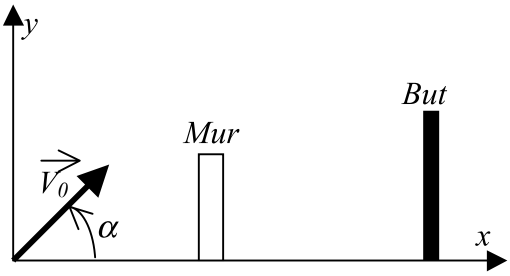
On lâche un objet sphérique de rayon r=3cm et de masse volumique $\mu = 1{,}7 g.cm^{-3}$ depuis une altitude h = 25m (comptée à partir du sol). On étudie le mouvement de cet objet dans le référentiel terrestre, muni d'un repère d'origine O correspondant au point de départ de l'objet et d'un axe vertical orienté vers le bas. Donnée : masse volumique de l'air $\mu_a = 1 kg.m^{-3}$.

1. La poussée d'Archimède, que subit l'objet de la part de l'air, a pour norme le poids de l'air « déplacé » par la sphère. Montrer qu'elle est négligeable par rapport à son propre poids.
2. On suppose que l'objet n'est soumis qu'à son poids au cours du mouvement.
   a. Etablir l'équation horaire z(t) du mouvement de l'objet.
   b. En déduire la durée de sa chute.
3. On suppose à présent qu'en plus de son poids, l'objet est soumis à l'action d'une force de frottements fluides due à l'air ***f***=-*k**v*** (avec k=0,020 USI et **v** le vecteur vitesse de l'objet)
   a. Quelles sont les dimensions de k ? En déduire son unité SI.
   b. Ecrire l'équation différentielle en **v** du mouvement de la goutte (équation vectorielle).
   c. Montrer que **v** tend vers une valeur limite que l'on exprimera.
   d. Trouver l'expression de $v_z(t)$.
   e. Donner l'expression de z(t). En déduire la durée de chute.

Exercice 7 : Coup franc

On étudie un coup franc de football tiré à 20m, face au but de hauteur 2,44m (cf figure).
Le ballon de masse m=430g est assimilé à un point matériel M posé sur le sol initialement en O. Le mur, de hauteur 1,90m, est situé à 9,15m du ballon. Le ballon est lancé avec une vitesse initiale $\overrightarrow{V_0}$ de norme

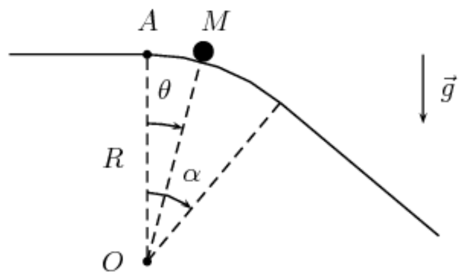
20m/s et formant un angle α de 20° avec l'horizontale. L'origine des dates correspond au départ du ballon.



1. Dans un premier temps, on néglige totalement les frottements de l'air.
    a. Etablir les équations horaires du mouvement du ballon ainsi que l'équation de la trajectoire.
    b. Le ballon passe-t-il au dessus du mur ?
    c. Le tir est-il cadré ?
2. En réalité, des frottements existent, qu'on modélise par une force $\vec{F} = -h\vec{v}$ où h est une constante positive de valeur 5.10-3kg/s et $\vec{v}$ le vecteur vitesse de M à chaque instant. (Un peu plus dur …)
    a. Déterminer les équations horaires du mouvement en introduisant la constante τ=m/h.
    b. Donner l'équation de la trajectoire.
    c. Le ballon passe-t-il au dessus du mur ?
    d. Le tir est-il cadré ?

Exercices d'approfondissement

Exercice 8: Comme au cinéma



Starsky et Hutsh poursuivent un voleur en fuite dans les rues de San Francisco. Leur voiture, assimilée à son centre de masse *M* circule à la vitesse v_0 constante sur une route horizontale. Elle aborde en A une descente modélisée par un arc de cercle de rayon *R* et d'angle α suivie d'une partie rectiligne. Le conducteur se place au point mort (force motrice nulle) et on néglige les frottements.

1. Appliquer le PFD au véhicule. En déduire les 2 équations différentielles régissant le mouvement.
2. Déterminer l'expression de la réaction normale en fonction de θ, α, m, v_0 et g.
3. A quelle condition sur α la voiture va-t-elle forcément quitter la route, même si v_0=0.
4. A quel endroit (θ_0) la voiture quittera t-elle la route ? Quelle sera alors sa vitesse ?

On donne : R=130m, g=10m.s^{-1}, v_0=126km/h et α=15°.

Exercice 9: Descente à Ski

Mr G descend une piste à ski, selon la ligne de plus grande pente faisant un angle α avec l'horizontale. L'air exerce une force de frottement supposée de la forme $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$ où λ est un coefficient constant positif et $\vec{v}$ le vecteur vitesse de Mr G.

On note $\vec{T}$ et $\vec{N}$ les composantes tangentielle et normale de la force de frottement exercée par la neige, et f le coefficient de frottement solide tel que $\left\|\vec{T}\right\| = f\left\|\vec{N}\right\|$.

On choisit comme origine de l'axe (Ox) de la ligne de plus grande pente la position initiale du skieur, supposé partir à l'instant initial avec une vitesse négligeable. On note (Oy) la normale à la piste dirigée vers le haut.

1. Calculer les normes de $\vec{T}$ et $\vec{N}$.
2. Calculer la vitesse et la position de Mr G à chaque instant.
3. Montrer qu'il atteint une vitesse limite v_L que l'on exprimera. AN : Calculer v_L avec λ=1,0kg/s, m=80kg, α=45° et f=0,90.
4. Calculer littéralement et numériquement la date T où le skieur a une vitesse égale à $v_L/2$.
5. A la date T, Mr G tombe. On néglige alors la résistance de l'air et on considère que le coefficient de frottement sur le sol est multiplié par 10. Calculer la distance parcourue par Mr G, dans cette position peu glorieuse, avant de s'arrêter.